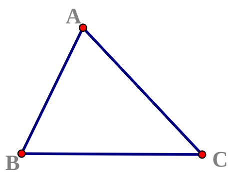
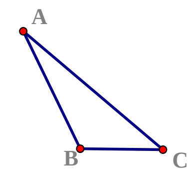
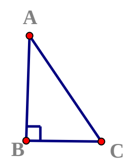
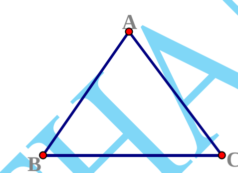
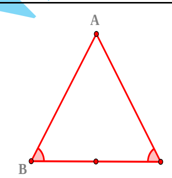
CHỦ ĐỀ 1

TAM GIÁC

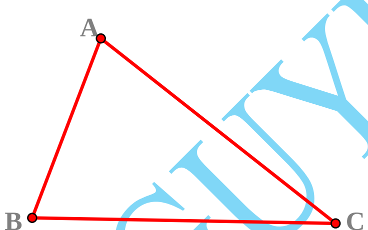
I. Kiến thức:

1.Các loại tam giác:

 Δ ABC nhọn $\Leftrightarrow \begin{cases} A < 90^o \\ B < 90^o \\ C < 90^o \end{cases}$	 Δ ABC tù $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A > 90^o \\ B > 90^o \\ C > 90^o \end{array}\right.$	 ΔABC vuông $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 90^o \\ B = 90^o \\ C = 90^o \end{array}\right.$	 ΔABC đều $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B = C = 60^o \\ AB = AC = BC \end{array}\right.$	 ΔABC cân tại A $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB = AC \\ B = C \end{array}\right.$.

2. Tổng ba góc trong một tam giác luôn bằng 180^o.

* Quan hệ giữa cạnh và góc trong một tam giác:



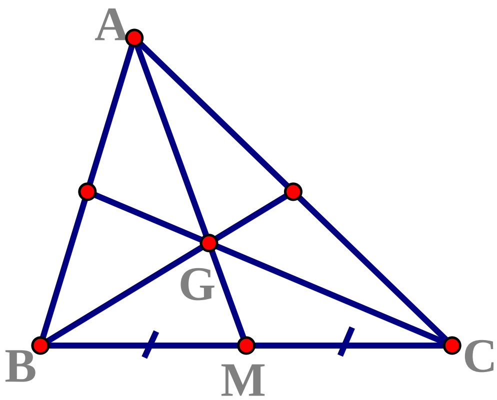
+) Trong một tam giác: cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn và ngược lại.

$\Delta ABC : B > C \Leftrightarrow AC > AB$.

+) Trong tam giác tù (tam giác vuông) cạnh đối diện với góc tù (cạnh huyền) là cạnh lớn nhất.

3. Các đường trong tam giác:

3.1.Trung tuyến:



+) AM là trung tuyến của tam giác ABC khi M là trung điểm của BC.

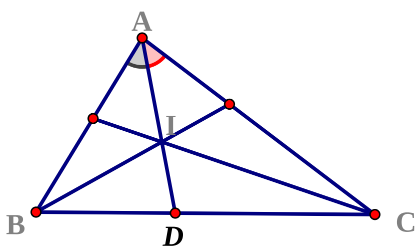
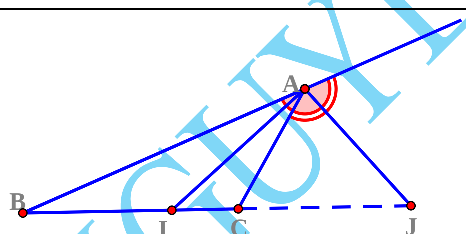
+) Ba đường trung tuyến đồng quy tại một điểm, điểm đó gọi là ***trọng tâm của tam giác.***

+) Tính chất trọng tâm G:

G là trọng tâm của tam giác $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} AG = \frac{2}{3}AM \\ MG = \frac{1}{3}AM \\ AG = 2GM \end{array}\right.$

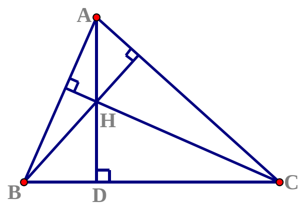
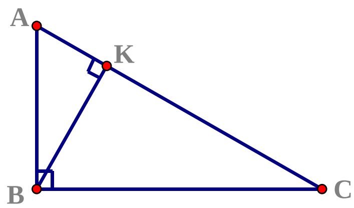
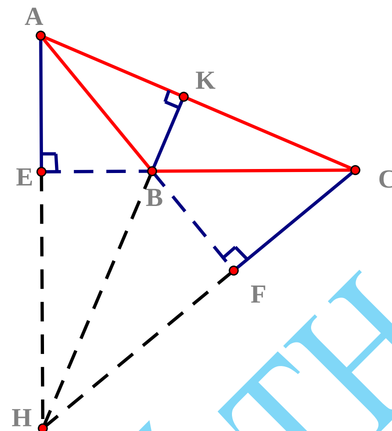
.

3.2.Phân giác trong:

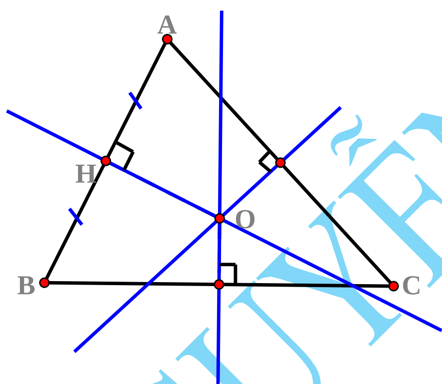
	+) AD là phân giác trong của tam giác ABC khi và chỉ khi $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$. +) Trong tam giác 3 đường phân giác trong cắt nhau tại một điểm, điểm đó được gọi là ***tâm đường tròn nội tiếp tam giác.*** +) Tính chất giao điểm ba đường phân giác trong: I là giao điểm 3 đường phân giác trong thì I cách đều 3 cạnh của tam giác.
	+) AI, AJ lần lượt là phân giác trong, phân giác ngoài của tam giác ABC, khi đó: $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC} = \frac{JB}{JC}$.

Chú ý: *gặp bài toán chứng minh tỉ lệ thức, thì ta chỉ áp dụng kiến thức về phân giác, định lý Ta let, tam giác đồng dạng.*

3.3. Đường cao:

	+) AH là đường cao của tam giác ABC $\Leftrightarrow AH \perp BC$. +) 3 đường cao của tam giác đồng quy tại một điểm, điểm đó gọi là ***trực tâm của tam giác***.
 ΔABC vuông tại B thì 3 đường cao đồng quy tại B. Khi đó đường cao hạ từ C xuống cạnh AB chính là CB; Đường cao hạ từ A chính là AB.	 ΔABC tù tại B, khi đó trực tâm H nằm ngoài tam giác.

3.4. Trung trực:



+) OH là đường trung trực của tam giác ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} OH \perp AB = \{H\} \\ HA = HB \end{cases}$.

+) 3 đường trung trực đồng quy tại một điểm, điểm đó gọi là ***tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác.***

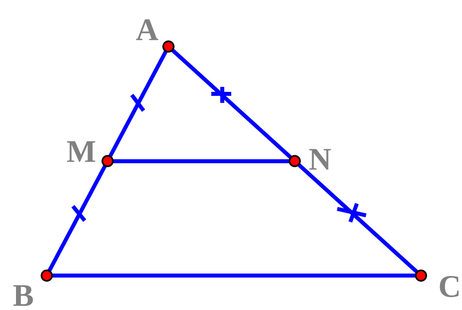
+) O là giao điểm của 3 đường trung trực của tam giác ABC, thì $OA = OB = OC$.

3.5. Đường trung bình của tam giác:

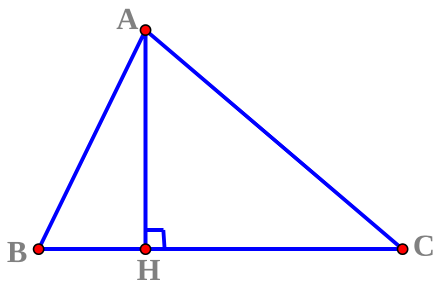
+) Đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác được gọi là đường trung bình của tam giác.

+) MN là đường trung bình của ΔABC

$$\Rightarrow \begin{cases} MN // BC \\ MN = \frac{1}{2} BC \end{cases}.$$



4.Diện tích và chu vi của tam giác:



+) Diện tích tam giác bằng nửa tích độ dài 1 cạnh với độ dài đường cao ứng với cạnh đó.

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC.AH.$$

+) Chu vi tam giác bằng tổng độ dài 3 cạnh của tam giác.

$$C_{\Delta ABC}=AB+BC+CA.$$

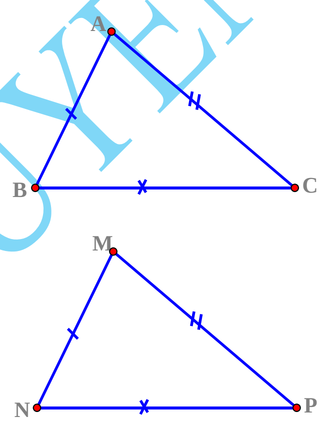
5. Bất đẳng thức tam giác: Trong một tam giác chiều dài của một cạnh phải nhỏ hơn tổng, nhưng lớn hơn hiệu của hai cạnh còn lại.

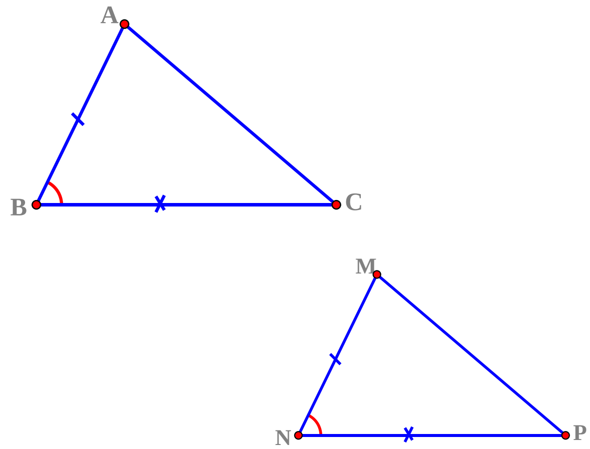
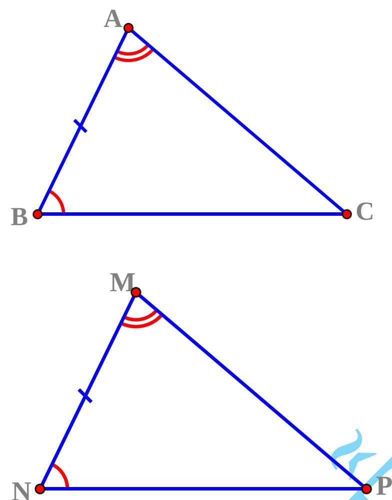
Cho tam giác ABC: $\Rightarrow\begin{cases}AB-AC<BC<AB+AC\\AB-BC<AC<AB+BC\\AC-BC<AB<AC+BC\end{cases}.$

6. Các trường hợp 2 tam giác bằng nhau:

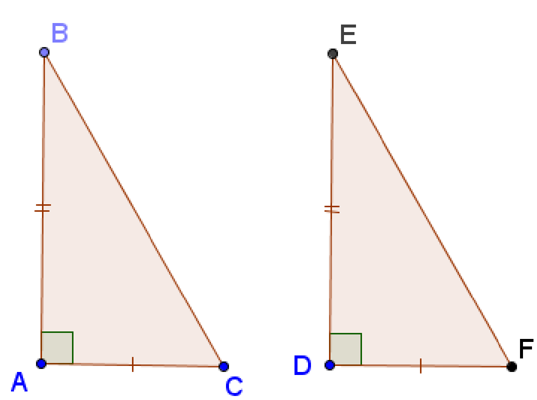
6.1. Hai tam giác thường:

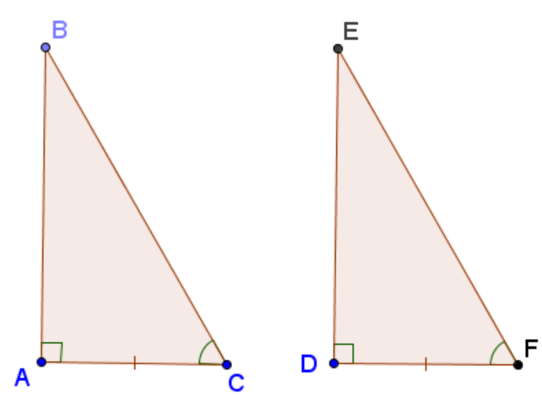
Định nghĩa: $\Delta ABC=\Delta MNP\Leftrightarrow\begin{cases}AB=MN,BC=NP,AC=MP\\A=M,B=N,C=P\end{cases}.$

Trường hợp 1: 	Nếu 3 cạnh của hai tam giác tương ứng bằng nhau thì hai tam giác đó bằng nhau. $\left.\begin{matrix}AB=MN\\BC=NP\\AC=MP\end{matrix}\right\}\Rightarrow\Delta ABC=\Delta MNP(c.c.c)$.
Trường hợp 2:	Nếu 2 cạnh của hai tam giác tương ứng bằng nhau và góc xen giữa 2 cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đó bằng nhau.

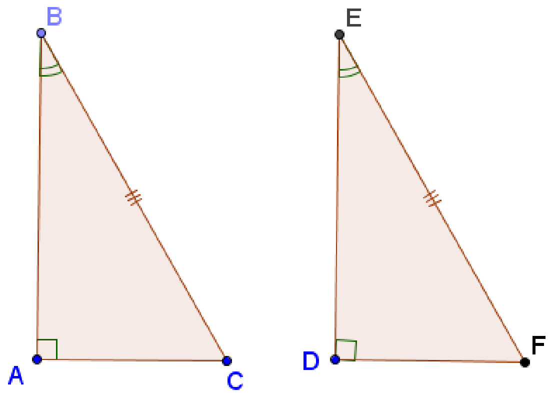
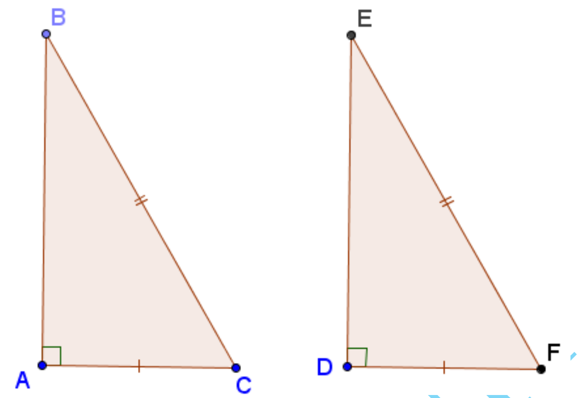
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$$\left.\begin{array}{l} AB = MN \\ ABC = MNP \\ BC = NP \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta MNP(c.g.c)$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Trường hợp 3:

</td>
<td>Nếu 2 góc của hai tam giác tương ứng bằng nhau và cạnh xen giữa chúng tương ứng bằng nhau thì hai tam giác đó bằng nhau.
$$\left.\begin{array}{l} BAC = NMP \\ AB = MN \\ ABC = MNP \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta MNP(\text{g.c.g})$$</td>
</tr>
</table>

6.2. Tam giác vuông:

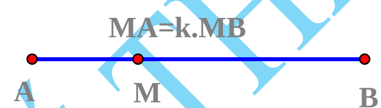
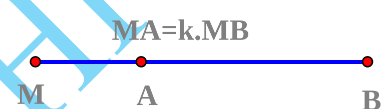
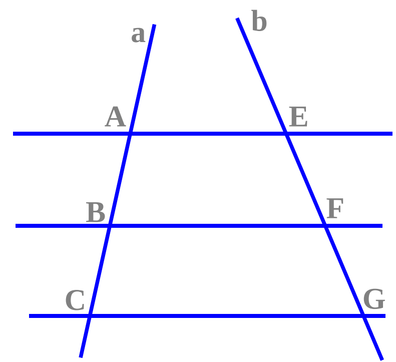
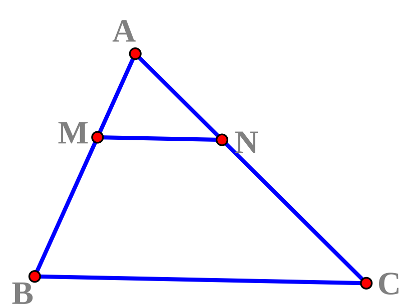
<table>
<tr>
<td>

$\Delta BAC = \Delta EDF(c.g.c)$.</td>
<td>

$\Delta BAC = \Delta EDF(g.c.g)$</td>
</tr>
</table>

 $\Delta BAC = \Delta EDF\,(ch.gn)$.	 $\Delta BAC = \Delta EDF\,(ch.cgv)$.

7. Định lý Ta-lét:

Cho đoạn thẳng AB và một số k, $k > 0, k \neq 1$. Điểm M gọi là điểm chia AB theo tỉ số k nếu $MA = k.MB$. Nếu M nằm trong đoạn thẳng AB ta nói M là điểm chia trong. Nếu M nằm ngoài đoạn thẳng AB ta nói M là điểm chia ngoài.	+) M là điểm chia trong:  +) M là điểm chia ngoài: 
Định lý Ta let: Các đường thẳng song song định ra trên hai đường thẳng không song song với chúng những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ. $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{EF}{FG}$. $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{EF}{EG}; \dfrac{BC}{CA} = \dfrac{GF}{GE}$.	
Định lý Ta let thuận trong tam giác: Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.	

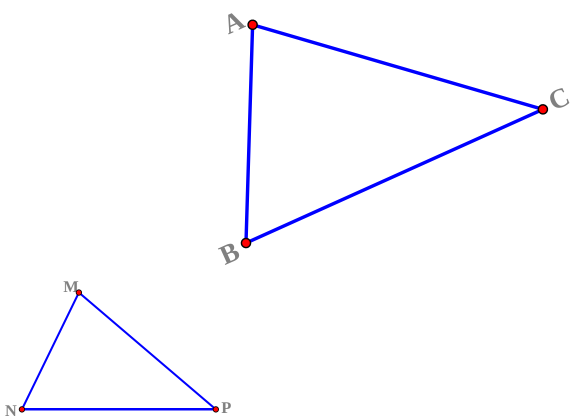
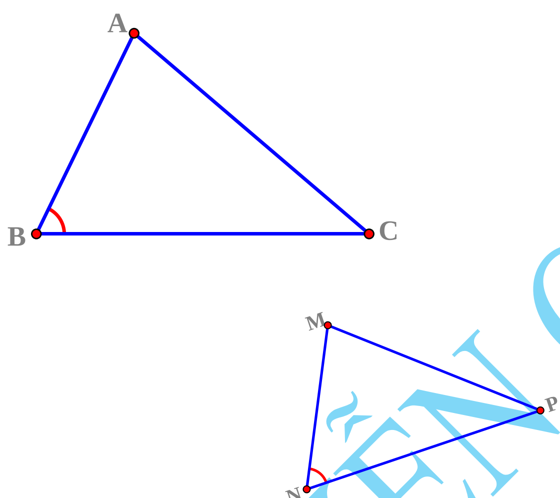
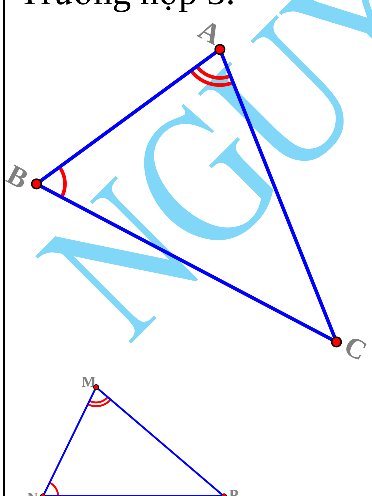
$MN//BC \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC} \\ \dfrac{AM}{BM}=\dfrac{AN}{CN} \\ \dfrac{BM}{AB}=\dfrac{CN}{AC} \end{array}\right.$	
Định lý Ta let đảo trong tam giác: Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.	$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC} \\ \dfrac{AM}{BM}=\dfrac{AN}{CN} \\ \dfrac{BM}{AB}=\dfrac{CN}{AC} \end{array}\right] \Rightarrow MN//BC$
Hệ quả Ta let trong tam giác: Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.	$MN//BC \Rightarrow \dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{MN}{BC}$. *(bản chất là tạo ra tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho)*

Chú ý: Nếu m, n, a và b thỏa mãn $\dfrac{a}{m}=\dfrac{b}{n}$ thì $\left[\begin{array}{l} \dfrac{a}{m}=\dfrac{b}{n}=\dfrac{a+b}{m+n} \\ \dfrac{a}{a+m}=\dfrac{b}{b+n} \\ \dfrac{a+m}{m}=\dfrac{b+n}{n} \end{array}\right.$ (với điều kiện các biểu thức có nghĩa)

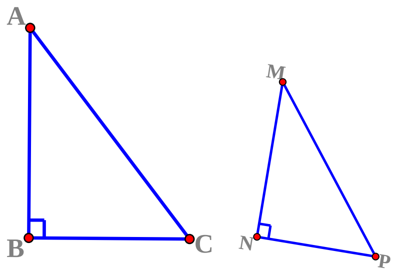
8. Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác:

8.1. Hai tam giác thường: Định nghĩa: $\Delta ABC \backsim \Delta MNP \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{AB}{MN}=\dfrac{BC}{NP}=\dfrac{AC}{MP} \\ A=M, B=N, C=P \end{cases}$.

ở đó: $\dfrac{AB}{MN}=k$ gọi là tỉ số đồng dạng.

Trường hợp 1:  	Nếu 3 cạnh của hai tam giác tương ứng tỉ lệ với nhau thì hai tam giác đó đồng dạng. $\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{NP}=\frac{AC}{MP}\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta MNP(c.c.c)$.
Trường hợp 2:  	Nếu 2 cạnh của hai tam giác tương ứng tỉ lệ và góc xen giữa 2 cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng. $\left.\begin{array}{l}\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{NP}\\ ABC=MNP\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta MNP(c.g.c)$
Trường hợp 3:  	Nếu 2 góc của hai tam giác tương ứng bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng. $\left.\begin{array}{l}BAC=NMP\\ ABC=MNP\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta MNP(g.g)$.

8.2. Hai tam giác vuông:

	$\Delta ABC \backsim \Delta MNP(ch.cgv) \Leftrightarrow \begin{cases} B = N = 90^o \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{AC}{MP} = \dfrac{AB}{MN} \\ \dfrac{AC}{MP} = \dfrac{BC}{NP} \end{array}\right. \end{cases}$ Nếu cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông này tương ứng tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia, thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.
Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia, thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.	Nếu góc nhọn của tam giác vuông này bằng góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.

Chú ý:

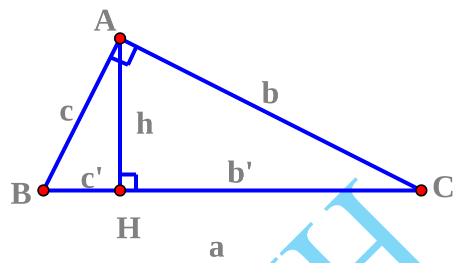
+) Tỉ số chu vi của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng:

$$\Delta ABC \backsim \Delta MNP \Rightarrow \frac{C_{\Delta ABC}}{C_{\Delta MNP}} = \frac{AB}{MN} = k.$$

+) Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương của tỉ số đồng dạng: $\Delta ABC \backsim \Delta MNP \Rightarrow \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNP}} = \left(\dfrac{AB}{MN}\right)^2 = k^2$.

+) Đặc biệt chú ý khi 2 tam giác đồng dạng chỉ cho ta các cạnh giữa 2 tam giác tương ứng tỉ lệ, không thể khẳng định các cạnh của 2 tam giác đó bằng nhau (rất nhiều bạn khi chứng minh được 2 tam giác đồng dạng, thì suy ra các cạnh tương ứng bằng nhau-như vậy là sai bản chất toán, chỉ có điều đó khi tỉ số đồng dạng bằng 1, nhưng nếu tỉ số đồng dạng bằng 1, thì các bạn hãy chứng minh 2 tam giác bằng nhau). Hai tam giác đồng dạng chỉ cho ta các góc tương ứng bằng nhau.

9. Hệ thức lượng trong tam giác vuông:



$a^2 = b^2 + c^2$ (định lý Pytago)

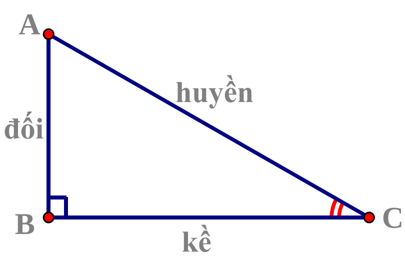
$b^2 = a.b'$; $c^2 = a.c'$.

$ah = bc$.

$h^2 = b'.c'$.

$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

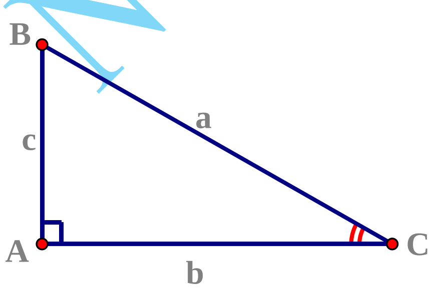
10. Tỉ số lượng giác trong tam giác vuông:

	$\sin C = \frac{AB}{AC}$ (đối/huyền); $\cos C = \frac{BC}{AC}$ (kề/huyền); $\tan C = \frac{AB}{BC}$ (đối/kề); $\cot C = \frac{BC}{AB}$ (kề/đối).

Bài vè để học:

Sin đi học	(sin = đối/huyền)	Sao đi học
Cốt không hư	(cos = kề/huyền)	Cứ khóc hoài
Tang đoàn kết	(tan = đối/kề)	Thôi đừng khóc
Cô tang kết đoàn	(cot = kề/đối)	Có kẹo đây.

Chú ý:

$\sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$	$\tan\alpha.\cot\alpha = 1$.
Cho $\alpha + \beta = 90^o$ ta có: $\sin\alpha = cos\beta$; $cos\alpha = \sin\beta$; $\tan\alpha = \cot\beta$; $\tan\beta = \cot\alpha$. (cách nhớ là: ***"PHỤ CHÉO".***	
	$b = a.\sin B = a.\cos C = c.\tan B = c.\cot C$. $c = a.\sin C = a.\cos B = b.\tan C = b.\cot B$.

II. Vận dụng:

Dạng 1. Định lý Ta let – Tam giác đồng dạng

Bài 1. Chứng minh hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Bài 2 (đường thẳng Euler). Cho tam giác ABC có trực tâm H. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, AC. Gọi O là giao điểm các đường trung trực của tam giác.

a) Chứng minh rằng $\Delta OMN \backsim \Delta HAB$. Tìm tỉ số đồng dạng.

b) So sánh độ dài AH và OM.

c) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\Delta HAG \backsim \Delta OMG$.

d) Chứng minh ba điểm H, G, O thẳng hàng và $GH = 2GO$.

Bài 3. Cho hình thang vuông ABCD $\left(A = D = 90^o\right)$; E là trung điểm của AD và $BEC = 90^o$. Cho biết $AD = 2a$. Chứng minh rằng:

a) $AB.CD = a^2$.

b) $\Delta EAB \backsim \Delta CEB$.

c) BE là tia phân giác của ABC.

Bài 4. Cho tam giác đều ABC và M là trung điểm của cạnh đáy BC. Một điểm D thay đổi trên cạnh AB sao cho có thể lấy điểm E trên cạnh AC thỏa mãn $DME = 60^o$. Chứng minh rằng:

a) $\Delta DBM \backsim \Delta MCE$.

b) $\Delta DME \backsim \Delta DBM$.

c) DM là phân giác của góc BDE, ME là phân giác của DEC.

d) Khoảng cách từ điểm M đến đoạn thẳng ED không đổi khi D thay đổi vị trí trên cạnh AB thỏa mãn điều kiện trên.

e) M cách đều 3 đường thẳng DE, AB, AC.

Bài 5. Xét đoạn thẳng AB và một điểm P nằm giữa A, B. Trên nửa mặt phẳng bờ AB, người ta kẻ các tia Ax, By vuông góc với AB và lần lượt trên hai tia đó lấy hai điểm C, D sao cho $AC.BD = AP.PB$.

a) Chứng minh $\Delta CAP \backsim \Delta PBD$.

b) Chứng minh $CPD = 90^o$.

c) Gọi M là hình chiếu của P trên CD. Chứng minh $AMB = 90^o$.

Bài 6. *(Đề thi tuyển sinh Quốc học Huế, 2002-2003)*

Cho hình thoi ABCD có góc đỉnh $BAD = 40^o$, gọi O là giao điểm hai đường chéo. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên cạnh AB. Trên tia đối của tia BC, tia đối của tia DC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho HM // AN.

a) Chứng minh: $MB.DN = BH.AD = DO.OB$.

b) Chứng minh: $\Delta MBO \backsim \Delta ODN$.

c) Tính góc MON.

d) Tính diện tích hình thoi ABCD khi $AC = 4cm$.

Bài 7. Cho tam giác ABC có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

a) $AE.AC = AF.AB = AH.AD$.

b) $HA.HD = HB.HE = HC.HF$.

c) $AH.AD + BH.BE + CH.CF = \frac{1}{2}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right)$.

d) H là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác DEF.

Bài 8. Cho tam giác ABC. D, E, F theo thứ tự trên BC, CA, AB; AD cắt EF tại P. Chứng minh rằng: $\frac{PD}{PA}.BC = \frac{EC}{EA}.DB + \frac{FB}{FA}.DC$.